# ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ
# ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
# ΔΕΥΤΕΡΑ 28 ΜΑΪΟΥ 2012
# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
# ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

## ΘΕΜΑ Α

**Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 253**
**Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 191**
**Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 258**
**Α4. α. Σωστό , β. Σωστό, γ. Λάθος, δ. Λάθος, ε. Σωστό.**

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.** 1ος τρόπος

$|z-3|^2 + |z+3|^2 = 36 \Leftrightarrow (z-3)(\bar{z}-3) + (z+3)(\bar{z}+3) = 36 \Leftrightarrow$

$z\bar{z} - 3z - 3\bar{z} + 9 + z\bar{z} + 3z + 3\bar{z} + 9 = 36 \Leftrightarrow 2z\bar{z} = 18 \Leftrightarrow z\bar{z} = 9 \Leftrightarrow$

$|z|^2 = 9 \Leftrightarrow |z| = 3$

άρα ο γ.τ. των εικόνων του z είναι

**κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ = 3**

2ος τρόπος

$|z-3|^2 + |z+3|^2 = 36 \overset{z = x + yi}{\Leftrightarrow} |x + yi - 3|^2 + |x + yi + 3|^2 = 36 \Leftrightarrow$

$\left(\sqrt{(x-3)^2 + y^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x+3)^2 + y^2}\right)^2 = 36 \Leftrightarrow$

$(x-3)^2 + y^2 + (x+3)^2 + y^2 = 36 \Leftrightarrow$

$x^2 - 6x + 9 + y^2 + x^2 + 6x + 9 + y^2 = 36 \Leftrightarrow$

$2x^2 + 2y^2 = 18 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9$

άρα ο γ.τ. των εικόνων του z είναι

**κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ = 3**

**B2.** • $|z_1 - z_2| = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 = (3\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow$

$(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = 18 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2 + z_2\bar{z}_2 = 18 \Leftrightarrow$

$|z_1|^2 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2 + |z_2|^2 = 18 \Leftrightarrow -z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2 = 0 \Leftrightarrow$

$z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 0 \quad (1)$

• $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + z_2\bar{z}_2$

$= |z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + |z_2|^2 \overset{(1)}{=} 9 + 0 + 9 = 18$

άρα $|z_1 + z_2| = 3\sqrt{2}$

**B3.** 1ος τρόπος

$|2w - 1| = |w - 2| \underset{x,\, y \in \mathbb{R}}{\overset{w = x + yi}{\Leftrightarrow}} |2x + 2yi - 1| = |x + yi - 2| \Leftrightarrow$

$|(2x - 1) + 2yi| = |(x - 2) + yi| \Leftrightarrow$

$\sqrt{(2x - 1)^2 + (2y)^2} = \sqrt{(x - 2)^2 + y^2} \Leftrightarrow$

$(2x - 1)^2 + (2y)^2 = (x - 2)^2 + y^2 \Leftrightarrow$

$4x^2 - 4x + 1 + 4y^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 \Leftrightarrow$

$3x^2 + 3y^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w είναι

**κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ = 1**

2ος τρόπος

$|2w - 1| = |w - 2| \Leftrightarrow |2w - 1|^2 = |w - 2|^2 \Leftrightarrow$

$(2w - 1)(2\bar{w} - 1) = (w - 2)(\bar{w} - 2) \Leftrightarrow$

$4w\bar{w} - 2w - 2\bar{w} + 1 = w\bar{w} - 2w - 2\bar{w} + 4 \Leftrightarrow$

$3w\bar{w} = 3 \Leftrightarrow w\bar{w} = 1 \Leftrightarrow |w|^2 = 1 \Leftrightarrow |w| = 1$

άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w είναι

**κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ = 1**

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** $f'(x) = \left(\frac{2}{x} + \alpha x^2 + \beta\right)' = -\frac{2}{x^2} + 2\alpha x < 0$, αφού $\alpha < 0, x > 0$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0 , +\infty)$

**Γ2.** Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta = (0 , +\infty)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{2}{x} + \alpha x^2 + \beta\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{2}{x} + \alpha x^2 + \beta\right) \overset{\alpha<0}{=} -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow f(\Delta) = IR$$

Είναι $0 \in f(\Delta)$,

άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια ακριβώς λύση στο $(0 , +\infty)$

**Γ3. i)** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{2}{x} + \alpha x^2 + \beta\right) = +\infty$,

άρα η $C_f$ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 0$ για κάθε α, β

**ii)**
- αν $\alpha > 0$, τότε $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{2}{x} + \alpha x^2 + \beta\right) \overset{\alpha>0}{=} +\infty$
- αν $\alpha < 0$, τότε $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{2}{x} + \alpha x^2 + \beta\right) \overset{\alpha<0}{=} -\infty$
- αν $\alpha = 0$, τότε $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{2}{x} + \beta\right) = \beta \in IR$

άρα η $C_f$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y = \beta$

μόνο αν $\alpha = 0$ και για κάθε $\beta \in IR$

**Γ4.** Για να παρουσιάζει η f τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$ την τιμή 7

πρέπει $f'(1) = 0$ και $f(1) = 7$

$f'(1) = 0 \Leftrightarrow -2 + 2\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$

$f(1) = 7 \Leftrightarrow 2 + \alpha + \beta = 7 \overset{\alpha = 1}{\Leftrightarrow} \beta = 4$

Για $\alpha = 1$ και $\beta = 4$ είναι :

$$f(x) = \frac{2}{x} + x^2 + 4$$

$$f'(x) = \left(\frac{2}{x} + x^2 + 4\right)' = -\frac{2}{x^2} + 2x = \frac{2x^3 - 2}{x^2} = \frac{2(x-1)(x^2 + x + 1)}{x^2}$$

| x | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f΄(x) | | - | 0 | + | |
| f | | ↘ | | ↗ | |

τοπ. ελάχιστο

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Θεωρούμε συνάρτηση φ, με $\varphi(x) = \dfrac{f(x) + \eta\mu x}{x^2 - x}$, $x \in IR-\{0,1\}$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = 2$ και

$f(x) + \eta\mu x = \varphi(x)\cdot(x^2 - x) \Leftrightarrow f(x) = -\eta\mu x + \varphi(x)\cdot(x^2 - x)$ **(1)**

- $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) \overset{(1)}{=} \lim\limits_{x\to 0}\left[-\eta\mu x + \varphi(x)\cdot(x^2 - x)\right]$

$= \lim\limits_{x\to 0}(-\eta\mu x) + \lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)\cdot\lim\limits_{x\to 0}(x^2 - x) = 0 + 2\cdot 0 = 0$

- $f(1) = f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \overset{(1)}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\eta\mu x + \varphi(x)\cdot x\cdot(x-1)}{x}$

$$= \lim_{x\to 0}\left[-\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\varphi(x)\cdot \cancel{x}\cdot(x-1)}{\cancel{x}}\right]$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} + \lim_{x\to 0}\varphi(x)\cdot\lim_{x\to 0}(x-1) = -1 + 2\cdot(-1) = -3$$

**Δ2.** Η g είναι παραγωγίσιμη στο [0 , 1] ως πράξεις παραγωγίσιμων

με $g'(x) = f'(x) + 2\alpha\cdot(x+1)$

$g(0) = f(0) + \alpha = 0 + \alpha = \alpha$

$g(1) = f(1) + 4\alpha = 4\alpha - 3$

Για να ικανοποιεί η g τις υποθέσεις του Θ. Rolle πρέπει

$4\alpha - 3 = \alpha \Leftrightarrow 3\alpha = 3 \Leftrightarrow \alpha = 1$

Για $\alpha = 1$ είναι :

$g(x) = f(x) + (x + 1)^2$

$g'(x) = f'(x) + 2(x + 1)$

$g''(x) = f''(x) + 2$

**Δ3.** • Από το Θ. Rolle με τη συνάρτηση $g$, προκύπτει ότι η $g'(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0 , 1)$

• $g''(x) = f''(x) + 2 > 0$, διότι $f''(x) > -2$, άρα η $g'$ είναι γνησίως αύξουσα άρα η $g'(x) = 0$ έχει μια το πολύ ρίζα στο $IR$

Επομένως υπάρχει ένα μοναδικό $\xi \in (0 , 1)$, τέτοιο ώστε

$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) + 2(\xi + 1) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = -2(\xi + 1)$



**Δ4.** Το $\xi$ είναι η μοναδική ρίζα της $g'$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow g'(x) > g'(0) \overset{g' \uparrow}{\Leftrightarrow} x > 0$

| x | $-\infty$ | $\xi$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | - | 0 | + |
| g | ↘ | | ↗ |

Η $g$ παρουσιάζει ελάχιστο για $x = \xi$.